Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 9

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 09. Januar 2020, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 9.1 ***Beweismechanikaufgabe*** (*4 Punkte*)

Bitte gehen Sie in dieser Aufgabe nach den Regeln der Beweismechanik vor und geben Ihre Lösung auf einem separaten Blatt in den Briefkasten mit der Aufschrift „Beweismechanikaufgaben“ ab. Ihnen unbekannte Begriffe und Symbole können Sie in der Beweismechanik nachschlagen.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei

$$\mathcal{L} := \{f : f : \mathbb{R}^3 \to V \text{ ist linear}\}.$$

(i) Es gilt folgende Aussage (die Sie nicht beweisen müssen):
$\mathcal{L}$ ist bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Erklären Sie (im Stile einer Definition), was hierbei mit „punktweiser Addition und Skalarmultiplikation“ gemeint ist.

(ii) Seien nun $v, w \in V \setminus \{0\}$ und seien $f : \mathbb{R}^3 \to V$, $x \mapsto (x_1 + x_2)v$ und $g : \mathbb{R}^3 \to V$, $x \mapsto (x_1 - x_2)w$. Zeigen Sie, dass $f, g \in \mathcal{L}$ gilt und dass f und g linear unabhängig sind.

Definition für Aufgabe 9.2: Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f

(1) *injektiv* genau dann wenn $\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
(2) *surjektiv* genau dann wenn $f(M) = N$, d.h. genau dann wenn $\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$.
(3) *bijektiv* genau dann wenn f injektiv und surjektiv ist.

Aufgabe 9.2 (*5 Punkte*)

Sei K ein Körper, V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt: Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.
(b) f ist genau dann surjektiv, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt: Ist $V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, so auch $W = \operatorname{span}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.
(c) f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt: Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine Basis von W.
(d) f ist genau dann ein Isomorphismus wenn f^{-1} ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 9.3 (*3 Punkte*)

In Korollar 16.1 wurde gezeigt, dass eine $(n \times n)$-Matrix A invertierbar ist, falls ihre Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Zeigen Sie die Umkehrung: Ist eine $(n \times n)$-Matrix A invertierbar, so sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig.

Aufgabe 9.4 *(4 Punkte)*

Bezeichnen $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen, so ist $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Dies dürfen sie im Folgenden ohne Beweis verwenden.

(a) Zeigen Sie: Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ linear abhängig, so existieren $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ und $z_1, ..., z_n \in \mathbb{Z}$, so dass $\Sigma_{i=1}^n z_i x_i = 0$ und $z_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Es sei nun $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Ist x eine positive reelle Zahl, so bezeichnen wir mit $\mathrm{ld}(x)$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl y, so dass $2^y = x$. Diese eindeutige Existenz eines solchen $y \in \mathbb{R}$ setzen wir im Folgenden als gegeben voraus. $\mathrm{ld}(x)$ heißt auch *dualer Logarithmus* von x.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\{\mathrm{ld}(p) : p \in \mathbb{P}\}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum keine endliche Basis hat.

Bemerkung: Beachten Sie, dass hieraus allein noch nicht folgt, dass $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ unendlich-dimensional ist - dazu müssten wir zudem zeigen, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum überhaupt eine Basis hat. In der Linearen Algebra 2 werden Sie lernen, dass tatsächlich jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Bonusaufgabe 9.5 *(4 Bonuspunkte)*

Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob die folgenden Mengen in den jeweiligen Vektorräumen über den jeweiligen Körpern linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$.

(b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$.

(c) $\{\left(123, \frac{3}{4}\right), \left(\cos\frac{1}{3}, \sin\frac{7}{13}\right), \left(\sqrt{17}, -\frac{50}{49}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{177}\right)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$

(d) $\{2, 1+2X, X^2, 2X^2+X^3, X+2X^3\} \subseteq \mathbb{F}_3[X]$, wobei $\mathbb{F}_3[X]$ den Raum der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_3$ bezeichnet (Vgl. Aufgabe 8.1).

Bonusaufgabe 9.6 *(4 Bonuspunkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq ab$. Zeigen Sie, dass $x, y \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $ax + by = n$.